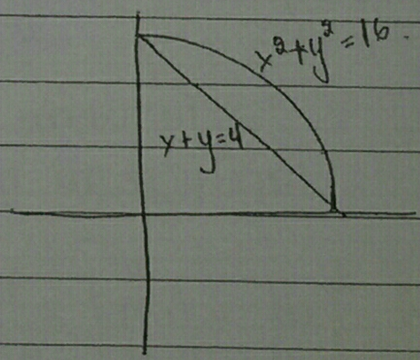
Ανάλογα ο όγκος του στερεού που προέρχεται από την περιστροφή του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ δυο καμπυλών $x=f_1(y)$ και $x=f_2(y)$ γύρω από τον άξ. y ο όγκος ισούται με:

$$V = \pi \int_a^b \left(f_1^2(y) - f_2^2(y)\right) dy.$$

π.χ. Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής γύρω από τον άξ. x του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του τόξου του κύκλου $x^2+y^2=16$ και της ευθείας $x+y=4$.




Σημεία τομής. $y=0$ ή $y=4$
$x=4$ $\quad x=0$

$$V = \pi \int_0^4 \left( (\sqrt{16-x^2})^2 - (4-x)^2 \right) dx =$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{16-x^2})^2 dx - \pi \int_0^4 ((4-x)^2)\, dx =$$

$$= \pi \int_0^4 (16-x^2)\, dx - \pi \int_0^4 (16-8x+x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left( \int_0^4 16\, dx - \int_0^4 x^2 dx - \int_0^4 16\, dx + 8\int_0^4 x\, dx - \int_0^4 x^2 dx \right) =$$

$$= \pi \left( 8\int_0^4 x\, dx - 2\int_0^4 x^2 dx \right) = \pi \left( 8 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \right) =$$

$$= \pi \left( (8\, \underline{16} - 0) - 2(\underline{64} - 0) \right) = \pi\,(64 - 2\cdot 64) = 64\pi$$

$\boxed{\text{D}(2)}$ $f(x) = \sin(x)\cos(x) \quad x \in [0, \pi]$

$$V = \int_0^{\pi} \pi[\sin(x)\cos(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \sin^2(2x)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(4x)}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}dx - \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \frac{\cos(4x)}{2} dx = \frac{\pi}{8}[x]_0^{\pi} - \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{32}\int_0^{\pi} (\sin(4x))' dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{32}[\sin(4x)]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{8} -$$

$$\frac{\pi}{32}[\sin(4\pi) - \sin(0)] = \frac{\pi^2}{8}$$